Programme de colle n°12

semaine du 15 au 19 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 15 : Dérivation *(en complément du programme précédent)* :

- Fonction (K-)lipschitzienne, toute fonction lipschitzienne est continue
- Inégalité des accroissements finis ; Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max\limits_{[a,b]} |f'(x)|$
- Notation $f^{(n)}$, fonction de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ensembles $\mathscr{D}^n(D,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^\infty(D,\mathbb{R})$ — le $\mathbb{R}$ peut être omis en notant $\mathscr{C}^n(D)$, etc.
- Vu en TD : calcul de $f^{(n)}$ en conjecturant une formule qu'on montre par récurrence
- Opérations sur $\mathscr{C}^n(D,\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$: combinaisons linéaires, produit avec la formule de Leibniz (si $n < +\infty$), quotient, composition
- Si f est bijective de classe $\mathscr{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) et que f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$
- Fonctions complexes : adaptation des définitions / résultats précédents :
  - Ne sont pas conservés : les notions d'extremum, de monotonie, Rolle, TAF, etc.
  - Sont conservés : l'IAF, une fonction complexe dérivable définie sur un intervalle est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de l'intervalle
  - f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur D si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont et si $n < +\infty$, on a $f^{(n)} = (\operatorname{Re} f)^{(n)} + i\,(\operatorname{Im} f)^{(n)}$

Chapitre 16 : Convexité

- Fonction convexe : définition, position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes, inégalité de Jensen
- $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si elle vérifie l'inégalité des pentes, i.e. pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$
- Caractérisation de la convexité avec la monotonie de la dérivée
- Caractérisation de la convexité avec le signe de la dérivée seconde
- Position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport à sa tangente
- Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes
- Fonction concave : définition, adaptation de tous les résultats précédents

N'est pas au programme cette semaine : fonction lipschitzienne, inégalité des accroissements finis.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **13 à 15**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Énoncés uniquement : théorème de la limite de la dérivée et formule de Leibniz ainsi qu'une question flash supplémentaire Chapitre 15, Théorèmes 15.22 et 15.26
2. Énoncé uniquement : inégalité de Jensen. Puis montrer que pour tous réels $x_1, \cdots, x_n > 0$, on a :
$$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$$
Chapitre 16, Théorème 16.8 et Exemple 5 qui suit
3. Énoncés uniquement : définition d'une fonction convexe, inégalité des pentes, mettre en évidence l'inégalité des pentes sur un dessin Chapitre 16, Définition 16.2 et Théorème 16.9

Questions Flash au programme :

Chapitre 15 :

- À quelle condition f est-elle dérivable à droite en a et que vaut alors $f'_d(a)$?
- Si f est dérivable à droite et à gauche en a, peut-on dire que f est dérivable en a ?
- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Donner une ou des conditions nécessaires qui permettent de déduire qu'un point a est un point critique de f.
- Énoncer le théorème de Rolle.
- Énoncer le théorème des accroissements finis.
- Donner la définition de fonction lipschitzienne.
- Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$
- Énoncer le théorème de la limite de la dérivée.
- Que doit vérifier f pour être une fonction de classe $\mathscr{C}^n$? et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- Soit g, h deux fonctions $\mathscr{C}^n$. Énoncer la formule de Leibniz pour la fonction $f = gh$.

Chapitre 14 :

- Donner la définition de "$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$" en termes de quantificateurs pour a et ℓ finis.
- Des variantes de la question précédente où a et/ou ℓ peuvent être égaux à $+\infty$ ou $-\infty$.
- Donner les quatre formes indéterminées qui font intervenir les opérations somme, produit et quotient.
- Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite pour une fonction f, pour une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ au point a.
- Est-ce qu'une fonction qui admet une limite à gauche et à droite en un point qui sont égales admet nécessairement une limite en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Donner la définition de "f est continue en a" en termes de limite puis en termes de quantificateurs.
- Est-ce qu'une fonction qui est continue à gauche et à droite en un point est nécessairement continue en ce point ? Si c'est faux, tracer un contre-exemple.
- Soit $a \in D$. À quelle condition peut-on prolonger par continuité une fonction f définie sur $D \setminus \{a\}$ au point a ? Que vaut alors $f(a)$?

- Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
- Énoncer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires *(celui qui traite de l'injectivité, indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !).*
- Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- Énoncer le corollaire du théorème des bornes atteintes *(celui qui dit que l'image de tout segment par une fonction continue (...), indication qui ne sera pas mise sur le sujet de colle !).*

Chapitre 13 :

- Donner la définition de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée" ainsi que "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante"
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \to \ell$ en termes de quantificateurs.
- Que signifie l'assertion "(u_n) est convergente" ? et "(u_n) est divergente" ?
- Donner la définition de $u_n \to +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Soit (u_n) une suite croissante. Que doit-elle vérifier pour être convergente ? et divergente ?
- Donner la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes" puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Que doit vérifier l'application φ pour que $(u_{\varphi(n)})$ soit une suite extraite de (u_n) ?
- Donner la définition de "ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n)".
- On suppose que $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell'$. Que peut-on dire si $\ell \neq \ell'$? et si $\ell = \ell'$?
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass ~~et le démontrer~~